# PROBLEMES DE TRANSPORT
# ALGORITHME DU STEPPING-STONE

Considérons le problème suivant : 4 origines notées $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$ et 5 destinations notées $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$ , $D_5$

Chaque origine a une offre (à respecter) et chaque destination une demande (à satisfaire)
On possède, en outre, les coûts de transport unitaires des origines vers les destinations.

Tout l'information est résumée dans le tableau suivant (les coûts sont dans le corps du tableau) :

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Offre |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 7 | 12 | 1 | 5 | 9 | 12 |
| $O_2$ | 15 | 3 | 12 | 6 | 14 | 11 |
| $O_3$ | 8 | 16 | 10 | 12 | 7 | 14 |
| $O_4$ | 18 | 8 | 17 | 11 | 16 | 8 |
| Demande | 10 | 11 | 15 | 5 | 4 | |

La question qu'on se pose est la suivante : quelles quantités de marchandise envoyer des origines vers les destinations en respectant l'offre et en satisfaisant la demande **au moindre coût** ?

C'est, à l'évidence, un problème de programmation linéaire avec 20 variables qu'on pourra présenter dans un tableau analogue ; on aura donc deux tableaux similaires, un pour les **coûts** et un pour les **quantités**.

On pourrait résoudre ce problème à l'aide de l'algorithme du simplexe, mais on va préférer un algorithme spécifique (le Stepping-Stone) qui tiendra compte des particularités du problème posé pour en simplifier la résolution.

L'algorithme du Stepping-Stone sera un algorithme itératif (donc par étapes successives) visant à améliorer (donc faire baisser le coût global) une solution de base.

Il nous faut donc une solution de départ pour démarrer l'algorithme.

Nous allons fournir 2 méthodes permettant d'en obtenir une : la méthode du coin Nord-Ouest et la méthode de Balas-Hammer

1) <u>Obtention d'une solution de base par la méthode du coin Nord-Ouest</u>

L'idée de la méthode est le suivant : remplir au maximum la case du tableau en haut , à gauche (le « coin Nord-Ouest »), puis compléter sur la ligne ou la colonne (de façon à atteindre l'offre ou la demande) et continuer ainsi à compléter les cases immédiatement à droite et en dessous alternativement.
Exemple : 10, puis à droite, en bas, à droite, en bas……

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 2 | | | | 12 |
| | 9 | 2 | | | 11 |
| | | 13 | 1 | | 14 |
| | | | 4 | 4 | 8 |
| 10 | 11 | 15 | 5 | 4 | |

Cette méthode a pour elle l'avantage de fournir rapidement et aisément une solution de base mais l'inconvénient (puisqu'elle ne fait jamais intervenir les coûts) d'être en général assez « loin » de l'optimum, donc de nécessiter ensuite de nombreuses étapes avant de l'atteindre.

2) Obtention d'une solution de base par la méthode de Balas-Hammer

Cette méthode, appelée aussi méthode de la **différence maximale**, fera intervenir les coûts unitaires de transport et sera donc, **en général**, assez proche de l'optimum.

Pour chaque rangée (ligne ou colonne) du tableau des coûts, on déterminera l'élément le plus petit et celui qui lui est immédiatement supérieur et on calculera leur différence (notée $\Delta$)

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 7 | 12 | 1 | 5 | 9 | 4 |
| $O_2$ | 15 | 3 | 12 | 6 | 14 | 3 |
| $O_3$ | 8 | 16 | 10 | 12 | 7 | 1 |
| $O_4$ | 18 | 8 | 17 | 11 | 16 | 3 |
| $\Delta$ | 1 | 5 | 9 | 1 | 2 | |

Dans la rangée correspondant à la différence maximale (ici la colonne D3) on remplira la case contenant le plus petit élément (ici la case $O_1D_3$) avec le minimum de l'offre de la ligne et de la demande de la colonne.
Puis on recommencera le processus autant de fois que nécessaire en supprimant à chaque fois l'origine dont l'offre est entièrement utilisée et/ou la destination dont la demande est complètement satisfaite.

Exemple :

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Offre | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | | | 12 | | | 12 | 4 |
| $O_2$ | | | | | | 11 | 3 |
| $O_3$ | | | | | | 14 | 1 |
| $O_4$ | | | | | | 8 | 3 |
| Demande | 10 | 11 | 15 | 5 | 4 | | |
| $\Delta$ | 1 | 5 | 9 | 1 | 2 | | |

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | |
| $O_2$ | 15 | 3 | 12 | 6 | 14 | 3 |
| $O_3$ | 8 | 16 | 10 | 12 | 7 | 1 |
| $O_4$ | 18 | 8 | 17 | 11 | 16 | 3 |
| $\Delta$ | 7 | 5 | 2 | 5 | 7 | |

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Offre |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | | | 12 | | | 12 |
| $O_2$ | | | | | | 11 |
| $O_3$ | 10 | | | | | 14 |
| $O_4$ | | | | | | 8 |
| Demande | 10 | 11 | 3 | 5 | 4 | |

| | X | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | |
| $O_2$ | X | 3 | 12 | 6 | 14 | 3 |
| $O_3$ | X | 16 | 10 | 12 | 7 | 3 |
| $O_4$ | X | 8 | 17 | 11 | 16 | 3 |
| $\Delta$ | | 5 | 2 | 5 | 7 | |

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Offre |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | | | 12 | | | 12 |
| $O_2$ | | | | | | 11 |
| $O_3$ | 10 | | | | 4 | 14 |
| $O_4$ | | | | | | 8 |
| Demande | 10 | 11 | 3 | 5 | 4 | |

| | X | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | X | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | |
| $O_2$ | X | 3 | 12 | 6 | X | 3 |
| X | X | X | X | X | X | |
| $O_4$ | X | 8 | 17 | 11 | X | 3 |
| $\Delta$ | | 5 | 5 | 5 | | |

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Offre |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | | | 12 | | | 12 |
| $O_2$ | | 11 | | | | 11 |
| $O_3$ | 10 | | | | 4 | 14 |
| $O_4$ | | | | | | 8 |
| Demande | 10 | 11 | 3 | 5 | 4 | |

| | X | X | $D_3$ | $D_4$ | X | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | |
| $O_2$ | X | X | X | X | X | |
| X | X | X | X | X | X | |
| $O_4$ | X | X | 17 | 11 | X | 6 |
| $\Delta$ | | | 0 | 0 | | |

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Offre |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | | | 12 | | | 12 |
| $O_2$ | | 11 | | | | 11 |
| $O_3$ | 10 | | | | 4 | 14 |
| $O_4$ | | | 3 | 5 | | 8 |
| Demande | 10 | 11 | 3 | 5 | 4 | |

3) <u>Déroulement de l'algorithme</u>

On peut appliquer l'algorithme à n'importe laquelle des solutions de base.

On va l'appliquer, par exemple, à la solution fournie par la méthode du Coin Nord-Ouest.

L'algorithme consiste à modifier la solution pour une qui soit meilleure,
donc à rendre non vide une case vide du tableau des quantités

**On choisira la case qui permet la plus grande baisse du coût global de transport**

Pour la déterminer, on calculera :
a) les potentiels associés aux origines et aux destinations
b) les variations de coût unitaire pour chaque case vide (δ)
c) les quantités maximales qu'on peut ajouter à chaque case vide (q)

a) Comment déterminer les potentiels ?

On utilisera le tableau des coûts limité aux cases où la quantité transitée est non nulle :

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 7 | 12 | 1 | 5 | 9 |
| $O_2$ | 15 | 3 | 12 | 6 | 14 |
| $O_3$ | 8 | 16 | 10 | 12 | 7 |
| $O_4$ | 18 | 8 | 17 | 11 | 16 |

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 10 | 2 | | | |
| $O_2$ | | 9 | 2 | | |
| $O_3$ | | | 13 | 1 | |
| $O_4$ | | | | 4 | 4 |

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 7 | 12 | | | |
| $O_2$ | | 3 | 12 | | |
| $O_3$ | | | 10 | 12 | |
| $O_4$ | | | | 11 | 16 |

On déterminera les potentiels de proche en proche : on commencera par une destination, puis une origine, puis une destination…..en soustrayant de D à O et en ajoutant de O à D.

On fixera le premier potentiel arbitrairement et…suivre les flèches (on soustrait des destinations aux origines et on ajoute des origines aux destinations)

| **1** | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Pot. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 7 | 12 | | | | 0 |
| $O_2$ | | 3 | 12 | | | |
| $O_3$ | | | 10 | 12 | | |
| $O_4$ | | | | 11 | 16 | |
| Pot. | 7 | | | | | |

| **2** | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Pot. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 7 | 12 | | | | 0 |
| $O_2$ | | 3 | 12 | | | |
| $O_3$ | | | 10 | 12 | | |
| $O_4$ | | | | 11 | 16 | |
| Pot. | 7 | 12 | | | | |

| 3 | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Pot. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 7 | 12 | | | | 0 |
| $O_2$ | | 3 | 12 | | | 9 |
| $O_3$ | | | 10 | 12 | | |
| $O_4$ | | | | 11 | 16 | |
| Pot. | 7 | 12 | | | | |

| **4** | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Pot. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 7 | 12 | | | | 0 |
| $O_2$ | | 3 | 12 | | | 9 |
| $O_3$ | | | 10 | 12 | | |
| $O_4$ | | | | 11 | 16 | |
| Pot. | 7 | 12 | 21 | | | |

| **5** | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Pot. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 7 | 12 | | | | 0 |
| $O_2$ | | 3 | 12 | | | 9 |
| $O_3$ | | | 10 | 12 | | 11 |
| $O_4$ | | | | 11 | 16 | |
| Pot. | 7 | 12 | 21 | 23 | | |

| **6** | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Pot. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 7 | 12 | | | | 0 |
| $O_2$ | | 3 | 12 | | | 9 |
| $O_3$ | | | 10 | 12 | | 11 |
| $O_4$ | | | | 11 | 16 | 12 |
| Pot. | 7 | 12 | 21 | 23 | 28 | |

b) Comment déterminer les δ ?

Pour chaque case nulle, on calculera δ en ajoutant au coût unitaire de la case le potentiel de l'origine associée et en retranchant le potentiel de la destination correspondante :

| Coûts | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Pot. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | | | 1 | 5 | 9 | 0 |
| $O_2$ | 15 | | | 6 | 14 | 9 |
| $O_3$ | 8 | 16 | | | 7 | 11 |
| $O_4$ | 18 | 8 | 17 | | | 12 |
| Pot. | 7 | 12 | 21 | 23 | 28 | |

| $\delta$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Pot. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | | | -20 | -18 | -19 | 0 |
| $O_2$ | 17 | | | -8 | -5 | 9 |
| $O_3$ | 12 | 15 | | | -10 | 11 |
| $O_4$ | 23 | 8 | 8 | | | 12 |
| Pot. | 7 | 12 | 21 | 23 | 28 | |

c) Comment déterminer les q ?

On déterminera les quantités qu'on peut ajouter aux cases vides uniquement pour celles dont le $\delta$ est négatif ; il ne sert à rien, en effet, de remplir une case qui fait augmenter le coût !
Pour remplir une case vide, il faut diminuer une case pleine….donc constituer un circuit de cases pleines qu'on vide et remplit alternativement :

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Offre |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 10 | 2 | | | | 12 |
| $O_2$ | | 9 | 2 | | | 11 |
| $O_3$ | | | 13 | 1 | | 14 |
| $O_4$ | | | | 4 | 4 | 8 |
| Demande | 10 | 11 | 15 | 5 | 4 | |

La quantité maximale qu'on peut déplacer pour remplir la case $O_1D_3$ est donc 2 (la valeur minimale des cases où on enlève quelque chose.

On obtient tous les q de la même façon :

| q | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | | | 2 | 1 | 1 |
| $O_2$ | | | | 1 | 1 |
| $O_3$ | | | | | 1 |
| $O_4$ | | | | | |

En multipliant $\delta$ par q, on obtient la variation de coût consécutive au remplissage d'une case vide, cette baisse de coût est maximale pour la case $O_1D_3$, c'est elle qu'on va donc remplir en y mettant 2 unités, ce qui donne la solution suivante :

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Offre |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 10 | 2 | | | | 12 |
| $O_2$ | | 9 | 2 | | | 11 |
| $O_3$ | | | 13 | 1 | | 14 |
| $O_4$ | | | | 4 | 4 | 8 |
| Demande | 10 | 11 | 15 | 5 | 4 | |

$\rightarrow$

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | Offre |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 10 | | 2 | | | 12 |
| $O_2$ | | 11 | | | | 11 |
| $O_3$ | | | 13 | 1 | | 14 |
| $O_4$ | | | | 4 | 4 | 8 |
| Demande | 10 | 11 | 15 | 5 | 4 | |

On répète les étapes a)b)c) tant qu'il y a des $\delta$ négatifs. Quand tous les $\delta$ seront positifs, nous aurons **une** des solutions optimales.

Dans l'exemple ci-dessus, il faudra 5 étapes pour atteindre cet optimum :

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | | | 12 | | |
| $O_2$ | | 11 | | | |
| $O_3$ | 10 | | 3 | 1 | |
| $O_4$ | | | | 4 | 4 |

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | | | 12 | | |
| $O_2$ | | 11 | | | |
| $O_3$ | 10 | | 3 | | 1 |
| $O_4$ | | | | 5 | 3 |

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | | | 12 | | |
| $O_2$ | | 11 | | | |
| $O_3$ | 10 | | | | 4 |
| $O_4$ | | | 3 | 5 | |